

함수

함수와 그래프

1. 대응

- (1) 두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 의 원소에 집합 Y 의 원소를 짝지은 것을 집합 X 에서 집합 Y 로의 대응이라고 한다.
- (2) 이때 집합 X 의 원소 x 에 집합 Y 의 원소 y 가 짝 지어지면 x 에 y 가 대응한다고 하며, 기호로

$$x \rightarrow y$$

와 같이 나타낸다.

2. 함수

두 집합 X, Y 에 대하여 집합 X 의 각 원소에 집합 Y 의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 집합 X 에서 집합 Y 로의 함수라 한다. 이 함수를 f 라 하면 기호로

$$f: X \rightarrow Y$$

와 같이 나타낸다.

※ 함수를 나타낼 때에는 보통 f, g, h 와 같은 알파벳 소문자를 사용한다.

3. 정의역, 공역, 치역

- (1) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 집합 X 를 함수 f 의 정의역, 집합 Y 를 함수 f 의 공역이라 한다.
- (2) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 원소 x 에 공역 Y 의 원소 y 가 대응할 때, 기호로

$$y = f(x)$$

와 같이 나타내고, $f(x)$ 를 x 에서의 함수값이라 한다. 이때 함수값 전체의 집합

$$\{f(x) \mid x \in X\}$$

를 함수 f 의 치역이라 한다.

※ 함수 $y = f(x)$ 의 정의역이나 공역이 주어지지 않은 경우, 정의역은 $f(x)$ 가 정의되는 실수 x 의 값 전체의 집합으로, 공역은 실수 전체의 집합으로 생각한다.

예제 1

정의역이 $\{-2, 0, 2\}$ 인 함수 $f(x) = x^3$ 의 치역을 구하여라.

정답

$f(-2) = -8, f(0) = 0, f(2) = 8$ 이므로 치역은 $\{-8, 0, 8\}$ 이다.

4. 서로 같은 함수

두 함수 f, g 에 대하여

- (1) 정의역과 공역이 각각 같고
- (2) 정의역의 각 원소 x 에 대하여 $f(x) = g(x)$

일 때, 두 함수 f 와 g 는 서로 같다고 하고, 기호로

$$f = g$$

와 같이 나타낸다.

※ 두 함수 f 와 g 가 서로 같지 않을 때는 기호로 $f \neq g$ 와 같이 나타낸다.

예제 2

정의역이 $\{-1, 0, 1\}$ 인 두 함수 $f(x) = x^2, g(x) = x^4$ 는 같은가?

정답

$f(-1) = g(-1) = 1, f(0) = g(0) = 0, f(1) = g(1) = 1$ 이므로 두 함수는 같다.

5. 함수의 그래프

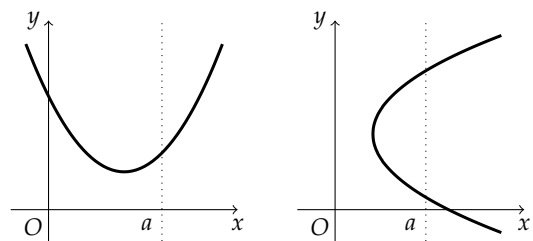
- (1) 함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 원소 x 와 이에 대응하는 함수값 $f(x)$ 의 순서쌍 전체의 집합

$$G = \{(x, f(x)) \mid x \in X\}$$

를 함수 f 의 그래프라고 한다.

- (2) 순서쌍 $(x, f(x))$ 는 좌표평면 위의 점 $(x, f(x))$ 에 대응하므로 그래프 G 를 점의 집합으로 생각하여 좌표평면 위에 나타낼 수 있다.
- (3) 좌표평면 위의 함수의 그래프는 정의역의 각 원소 a 에 대하여 직선 $x = a$ 와 오직 한 점에서 만난다.

왼쪽은 함수의 그래프이고, 오른쪽은 함수의 그래프가 아니다.



6. 일대일함수

함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 두 원소 x_1, x_2 에 대하여

$$x_1 \neq x_2 \text{ 이면 } f(x_1) \neq f(x_2)$$

가 성립할 때, 함수 f 를 일대일함수라 한다.

예를 들어 $f(x) = 2x$ 는 일대일함수이다. $x_1 \neq x_2$ 일 때

$$f(x_1) - f(x_2) = 2x_1 - 2x_2 = 2(x_1 - x_2) \neq 0$$

$$\therefore f(x_1) \neq f(x_2)$$

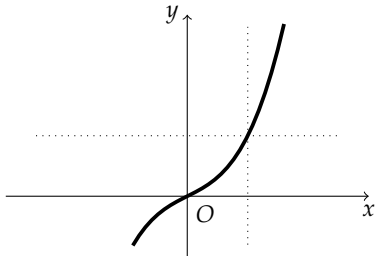
이기 때문이다.

반면 $f(x) = x^2$ 은 일대일함수가 아니다. $f(-1) = f(1) = 1$ 로, 서로 다른 정의역의 원소 -1 과 1 에 대하여 함수값이 같기 때문이다.

7. 일대일대응

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일함수이면서 치역과 공역이 같을 때, 이 함수를 일대일대응이라 한다.

정의역과 치역이 실수의 집합일 때 일대일대응을 그래프로 나타내면, x 축과 평행한 직선을 그었을 때, y 축과 평행한 직선을 그었을 때 교점이 하나만 있다.



따라서 일대일대응의 그래프는 계속 증가하거나 계속 감소한다.

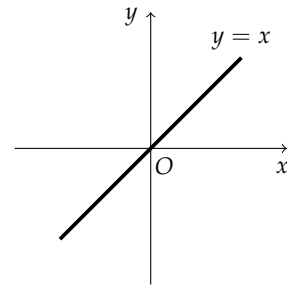
8. 항등함수

함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 임의의 원소 x 에 대하여

$$f(x) = x$$

이 성립할 때, 함수 f 를 집합 X 에서의 항등함수라고 한다.

정의역이 실수 전체의 집합일 때, 항등함수를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



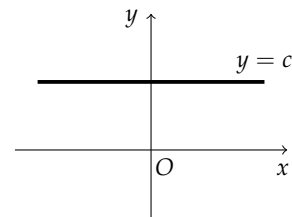
9. 상수함수

함수 $f: X \rightarrow Y$ 에서 정의역 X 의 모든 원소 x 에 대하여

$$f(x) = c \quad (c \text{는 상수})$$

일 때, 이 함수를 상수함수라 한다.

정의역이 실수 전체의 집합일 때, 상수함수를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



합성함수

1. 합성함수

(1) 두 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$ 가 주어졌을 때, 집합 X 의 임의의 원소 x 에 대하여 $f(x)$ 를 대응시키고, $f(x)$ 를 $g(f(x))$ 에 대응시켜서 X 에서 Z 로의 함수를 만들 수 있다. 이 함수를 f 와 g 의 합성함수라고 하며, 기호로

$$g \circ f$$

와 같이 나타낸다.

(2) 합성함수 $g \circ f$ 에서 x 의 함수값을

$$(g \circ f)(x)$$

로 나타내며, 이는 $g(f(x))$ 와 같다.

※ 함수 f 의 치역이 함수 g 의 정의역의 부분집합, 즉

$$\{f(x) \mid x \in X\} \subset Y$$

이면 합성함수 $g \circ f$ 를 정의할 수 있다.

예제 1.

두 함수 $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x$ 에 대하여 다음을 구하여라.

- (1) $(f \circ g)(2)$
- (2) $(g \circ f)(2)$
- (3) $(f \circ g)(x)$
- (4) $(g \circ f)(x)$

정답

- (1) $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = f(4) = 16$
- (2) $(g \circ f)(2) = g(f(2)) = g(4) = 8$
- (3) $(f \circ g)(x) = f(2x) = 4x^2$
- (4) $(g \circ f)(x) = g(x^2) = 2x^2$

2. 합성함수의 성질

세 함수 f, g, h 에 대하여

- (1) $g \circ f \neq f \circ g$
- (2) $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$
- (3) $f \circ I = I \circ f = f$ (단, I 는 항등함수)

역함수

1. 역함수

함수 $f: X \rightarrow Y$ 가 일대일대응이면 Y 의 각 원소 y 에 대하여 $f(x) = y$ 인 X 의 원소 x 는 단 하나 존재한다.

이때 Y 의 각 원소 y 에 $f(x) = y$ 인 X 의 원소 x 를 대응시키면 Y 를 정의역, X 를 공역으로 하는 새로운 함수를 만들 수 있다. 이 함수를 f 의 역함수라고 하며, 기호로

$$f^{-1}$$

와 같이 나타낸다. 즉,

$$f: X \rightarrow Y, y = f(x)$$

일 때

$$f^{-1}: Y \rightarrow X, x = f^{-1}(y)$$

이다.

※ f^{-1} 는 f 의 역함수 또는 f inverse라고 읽는다.

예제 1.

함수 $f(x) = ax + b$ 에 대하여 $f^{-1}(6) = 1$, $f^{-1}(8) = 2$ 이다. 상수 a, b 의 값을 구하여라.

정답

$f^{-1}(6) = 1$, $f^{-1}(8) = 2$ 이면 $f(1) = 6$, $f(2) = 8$ 이므로

$$a + b = 6, 2a + b = 8 \quad \therefore a = 2, b = 4$$

이다.

2. 역함수의 성질

세 함수 $f: X \rightarrow Y$, $g: Y \rightarrow Z$, $h: Z \rightarrow W$ 가 일대일 대응이고 그 역함수가 각각 f^{-1} , g^{-1} , h^{-1} 일 때, 다음이 성립한다.

- (1) $(f^{-1})^{-1} = f$
- (2) $f \circ f^{-1} = I$, $f^{-1} \circ f = I$ (단, I 는 항등함수)
- (3) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$
- (4) $(f \circ g \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ g^{-1} \circ f^{-1}$

예제 2.

두 함수 $f(x) = 2x + 1$, $g(x) = x - 2$ 에 대하여

$$(f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3)$$

의 값을 구하여라.

정답

주어진 식을 변형하면

$$\begin{aligned} (f \circ (g \circ f)^{-1} \circ f)(3) &= (f \circ f^{-1} \circ g^{-1} \circ f)(3) \\ &= (g^{-1} \circ f)(3) \\ &= g^{-1}(f(3)) = g^{-1}(7) \end{aligned}$$

이다. $g^{-1}(7) = a$ 라고 할 때 $g(a) = 7$ 이고

$$g(a) = a - 2 = 7 \quad \therefore a = 9$$

이므로, 정답은 9이다.

예제 3

두 함수 $f(x) = x + 2$, $g(x) = 2x + 4$ 에 대하여

$$f^{-1} \circ h = g$$

를 만족하는 함수 $h(x)$ 를 구하여라.

정답

$f^{-1} \circ h = g$ 의 양변 왼쪽에 f 를 합성하면 $h = f \circ g$ 이므로

$$h(x) = f(g(x)) = f(2x + 4) = 2x + 6$$

이다.

3. 역함수 만드는 방법

- (1) x 에 대하여 정리한 후 x 와 y 를 바꾼다.
- (2) 정의역과 치역을 서로 바꾼다.

예제 4

함수 $y = (x - 1)^2 + 2$ ($x \geq 1$)의 역함수를 구하여라.

정답

치역이 $\{y | y \geq 2\}$ 이므로 역함수의 정의역은 $\{x | x \geq 2\}$ 이다.
 x 에 대하여 정리하면

$$(x - 1)^2 = y - 2 \quad \therefore x = \sqrt{y - 2} + 1$$

x 와 y 를 바꾸면

$$y = \sqrt{x - 2} + 1 \quad (x \geq 2)$$

4. 역함수의 그래프의 성질

함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프는 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭이다.

※ 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 그 역함수 $y = f^{-1}(x)$ 의 그래프와의 교점은 함수 $y = f(x)$ 의 그래프와 $y = x$ 의 교점과 같다.

유리함수와 무리함수

유리식

1. 유리식

- (1) 두 다항식 A, B ($B \neq 0$)에 대하여

$$\frac{A}{B}$$

의 꼴로 나타내어지는 식을 유리식이라고 한다.

- (2) 분모 B 가 0이 아닌 상수이면 유리식 $\frac{A}{B}$ 는 다항식이 된다.

2. 유리식의 성질

세 다항식 A, B, C ($B \neq 0, C \neq 0$)에 대하여

$$(1) \frac{A}{B} = \frac{A \times C}{B \times C} \quad (2) \frac{A}{B} = \frac{A \div C}{B \div C}$$

3. 유리식의 사칙연산

다항식 A, B, C, D 에 대하여

$$\begin{aligned} (1) \frac{A}{C} + \frac{B}{C} &= \frac{A+B}{C} \quad (\text{단, } C \neq 0) \\ (2) \frac{A}{C} - \frac{B}{C} &= \frac{A-B}{C} \quad (\text{단, } C \neq 0) \\ (3) \frac{A}{B} \times \frac{C}{D} &= \frac{AC}{BD} \quad (\text{단, } BD \neq 0) \\ (4) \frac{A}{B} \div \frac{C}{D} &= \frac{A}{B} \times \frac{D}{C} = \frac{AD}{BC} \quad (\text{단, } BCD \neq 0) \end{aligned}$$

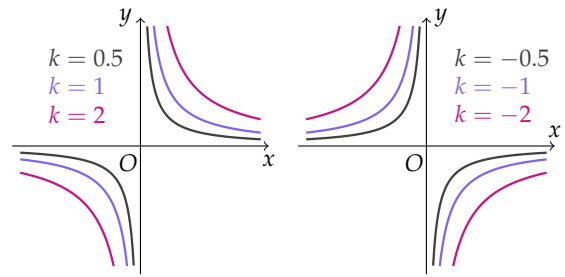
유리함수의 뜻과 그래프

1. 유리함수

- (1) 함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x)$ 가 x 에 대한 유리식일 때, 이 함수를 유리함수라 한다. 특히 $f(x)$ 가 x 에 대한 다항식일 때, 이 함수를 다항함수라 한다.
- (2) 유리함수의 정의역이 주어지지 않은 경우 분모를 0으로 하는 원소를 제외한 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

2. 유리함수 $y = \frac{k}{x}$ ($k \neq 0$)의 그래프

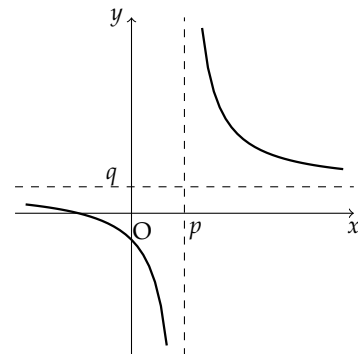
- (1) 정의역, 치역은 모두 0을 제외한 실수 전체의 집합이다.
- (2) $k > 0$ 이면 그래프는 제1사분면, 제3사분면에 있고, $k < 0$ 이면 그래프는 제2사분면, 제4사분면에 있다.
- (3) $|k|$ 의 값이 커질수록 그래프는 원점에서 멀어진다.
- (4) 점근선은 x 축($y = 0$)과 y 축($x = 0$)이다.
- (5) 원점, $y = x, y = -x$ 에 대하여 대칭이다.



3. 유리함수 $y = \frac{k}{x-p} + q$ ($k \neq 0$)의 그래프

- (1) 유리함수 $y = \frac{k}{x}$ 를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.
- (2) 정의역은 p 을 제외한 실수 전체의 집합, 치역은 q 을 제외한 실수 전체의 집합이다.
- (3) 점근선은 $x = p$ 와 $y = q$ 이다.
- (4) $(p, q), y = (x-p) + q, y = -(x-p) + q$ 에 대하여 대칭이다.

$k > 0$ 일 때 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 그래프



4. 유리함수 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ ($c \neq 0, ad - bc \neq 0$)의 그래프

- (1) 그래프는 $y = \frac{k}{x-p} + q$ 의 꼴로 변형하여 그린다.
- (2) 정의역은 $-\frac{d}{c}$ 을 제외한 실수 전체의 집합, 치역은 $\frac{a}{c}$ 을 제외한 실수 전체의 집합이다.
- (3) 점근선은 $x = -\frac{d}{c}$ 와 $y = \frac{a}{c}$ 이다.
- (4) $\left(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c}\right), y = \left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{a}{c}, y = -\left(x + \frac{d}{c}\right) + \frac{a}{c}$ 에 대하여 대칭이다.

$y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 를 변형하면

$$y = \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{\frac{a}{c}\left(x + \frac{d}{c}\right) - \frac{ad-bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} = \frac{-\frac{ad-bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} + \frac{a}{c}$$

즉, $x = -\frac{d}{c}$, $y = \frac{a}{c}$ 를 점근선으로 하는 유리함수이다. 단, $ad-bc=0$ 일 때는

$$y = \frac{a}{c}$$

이므로, 분수함수가 아니라 상수함수가 된다.

예제 1

다음 함수의 정의역, 치역, 점근선을 구하여라.

$$y = \frac{3x+5}{x-2}$$

정답

주어진 함수를 변형하면

$$y = \frac{3(x-2)+11}{x-2} = \frac{11}{x-2} + 3$$

이므로, 정의역은 2가 아닌 실수 전체의 집합, 치역은 3이 아닌 실수 전체의 집합, 점근선은 $x=2$ 와 $y=3$ 이다.

5. 잡동사니

$$\begin{aligned} \text{※ } y &= \frac{k}{x-m} + n \text{의 역함수는 } y = \frac{k}{x-n} + m \\ \text{※ } y &= \frac{ax+b}{cx+d} \text{의 역함수는 } y = \frac{-dx+b}{cx-a} \end{aligned}$$

무리식

1. 무리식

근호 안에 문자가 포함되어 있는 식 중에서 유리식으로 나타낼 수 없는 식을 무리식이라고 한다.

$$\text{예 : } \sqrt{x}, \sqrt{2-x}, \frac{1}{\sqrt{2-x}}$$

2. 제곱근의 성질

$a > 0, b > 0$ 일 때

$$\begin{aligned} (1) \sqrt{a}\sqrt{b} &= \sqrt{ab} & (2) \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} &= \sqrt{\frac{a}{b}} \\ (3) \sqrt{a^2b} &= a\sqrt{b} & (4) \sqrt{\frac{a}{b^2}} &= \frac{\sqrt{a}}{b} \end{aligned}$$

3. 분모의 유리화

$a > 0, b > 0, a \neq b$ 일 때

$$\begin{aligned} (1) \frac{c}{\sqrt{a}} &= \frac{c\sqrt{a}}{a} \\ (2) \frac{c}{\sqrt{a}+\sqrt{b}} &= \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{a-b} \\ (3) \frac{c}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} &= \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})} = \frac{c(\sqrt{a}+\sqrt{b})}{a-b} \end{aligned}$$

무리함수의 뜻과 그래프

1. 무리함수

- (1) 함수 $y = f(x)$ 에서 $f(x)$ 가 x 에 대한 무리식일 때, 이 함수를 무리함수라고 한다.
- (2) 무리함수의 정의역이 주어지지 않은 경우에는 근호 안의 식의 값이 0 이상이 되도록 하는 실수 전체의 집합을 정의역으로 한다.

예제 1.

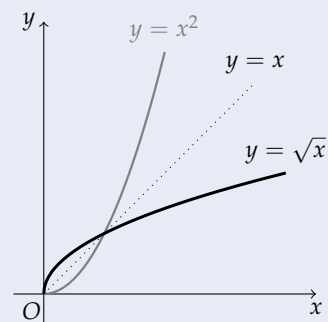
무리함수 $y = \sqrt{x-3}$ 의 정의역을 구하여라.

정답

$$x-3 \geq 0 \text{ 이어야 하므로 } \{x|x \geq 3\}$$

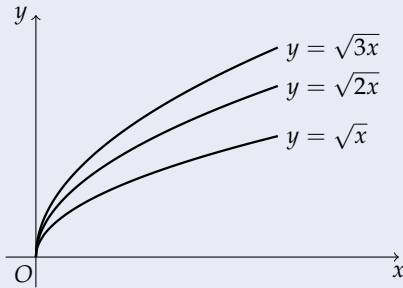
2. 무리함수 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프

무리함수 $y = \sqrt{x}$ 는 $y = x^2$ ($x \geq 0$)의 역함수이다. 따라서 $y = x^2$ 의 그래프를 $y = x$ 에 대하여 대칭이동하여 $y = \sqrt{x}$ 의 그래프를 그릴 수 있다.



3. 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프

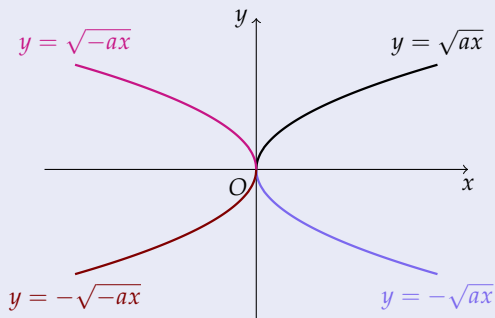
무리함수 $y = \sqrt{ax}$ ($a > 0$)의 그래프는 a 의 값이 커질수록 x 축에서 멀어진다.



4. 무리함수 $y = \pm\sqrt{ax}$ ($a \neq 0$)의 대칭이동

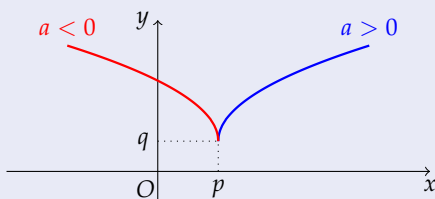
$a > 0$ 일 때

- (1) 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 y 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -\sqrt{ax}$
- (2) 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축에 대하여 대칭이동하면 $y = -\sqrt{ax}$
- (3) 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동하면 $y = -\sqrt{-ax}$



5. 무리함수 $y = \sqrt{a(x-p)} + q$ ($a \neq 0$)의 그래프

- (1) 무리함수 $y = \sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.
- (2) 정의역은 $a > 0$ 일 때 $\{x|x \geq p\}$, $a < 0$ 일 때 $\{x|x \leq p\}$ 이고, 치역은 $\{y|y \geq q\}$ 이다.



예제 2.

다음 무리함수의 정의역과 치역을 구하여라.

$$y = \sqrt{2x-4} + 3$$

정답

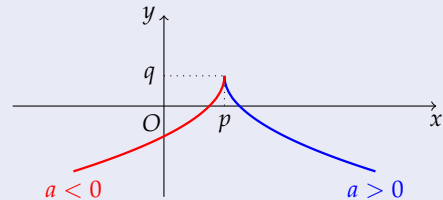
주어진 무리함수를 변형하면

$$y = \sqrt{2(x-2)} + 3$$

이므로, 정의역은 $\{x|x \geq 2\}$, 치역은 $\{y|y \geq 3\}$ 이다.

6. 무리함수 $y = -\sqrt{a(x-p)} + q$ ($a \neq 0$)의 그래프

- (1) 무리함수 $y = -\sqrt{ax}$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 p 만큼, y 축의 방향으로 q 만큼 평행이동한 것이다.
- (2) 정의역은 $a > 0$ 일 때 $\{x|x \geq p\}$, $a < 0$ 일 때 $\{x|x \leq p\}$ 이고, 치역은 $\{y|y \leq q\}$ 이다.



예제 3.

다음 무리함수의 정의역과 치역을 구하여라.

$$y = -\sqrt{3x+3} - 4$$

정답

주어진 무리함수를 변형하면

$$y = -\sqrt{3(x+1)} - 4$$

이므로, 정의역은 $\{x|x \geq -1\}$, 치역은 $\{y|y \leq -4\}$ 이다.