집합

집합의 뜻과 표현

1. 집합과 원소의 뜻

(1) 주어진 조건에 의하여 그 대상을 명확히 알 수 있는 것들의 모임을 **집합**이라고 한다.

(2) 집합에 속하는 대상 하나하나를 **원소**라고 한다.

2. 집합과 원소의 표현

(1) a가 집합 A의 원소라면

$$a \in A$$

와 같이 나타내고, a는 집합 A에 속한다고 한다.

(2) a가 집합 A의 원소가 아닐 때

$$a \notin A$$

와 같이 나타내고, a는 집합 A에 속하지 않는다고 한다.

※ 기호 $\in$은 원소를 뜻하는 Element의 첫 글자를 기호화한 것이다.

※ 일반적으로 집합은 알파벳 대문자로, 원소는 알파벳 소문자로 나타낸다.

3. 집합의 표현 방법

(1) **원소나열법**

집합에 속하는 모든 원소를 $\{\ \}$ 안에 나열하는 방법

(2) **조건제시법**

집합에 속하는 원소 x가 가져야 할 조건을

$$\{\, x \mid x\text{의 조건} \,\}$$

과 같이 나타내는 방법

(3) **벤 다이어그램**

집합에 속하는 원소를 원 또는 직사각형 같은 도형 안에 나열하는 방법

※ 원소나열법으로 집합을 표시할 때 원소의 나열 순서는 상관없다. 중복된 원소가 있다면 한 번만 쓰고, 일정한 규칙이 있다면 $\cdots$ 을 사용하여 나타낼 수 있다.

4. 유한집합과 무한집합

원소가 유한개인 집합을 **유한집합**, 원소가 무수히 많은 집합을 **무한집합**이라고 한다.

5. 공집합

원소의 개수가 0개인 유한집합을 **공집합**이라 하고, 기호로 $\varnothing$와 같이 나타낸다.

6. 유한집합의 원소의 개수

집합 A가 유한집합일 때, 집합 A의 원소의 개수를

$$n(A)$$

와 같이 나타낸다.

※ 기호 $n(\mathrm{A})$에서 n은 수를 뜻하는 Number의 첫글자이다.

예제 1

다음 값을 구하여라.

(1) $n(\{a,\ b,\ c\})$

(2) $n(\varnothing)$

(3) $n(\{\varnothing\})$

정답

(1) $n(\{a,\ b,\ c\}) = 3$

(2) $n(\varnothing) = 0$

(3) $n(\{\varnothing\}) = 1$

집합 사이의 포함 관계

1. 부분집합의 뜻

(1) 집합 A의 모든 원소가 집합 B에 속할 때, 집합 A를 집합 B의 부분집합이라고 한다. 이때 집합 A는 집합 B에 포함된다 또는 집합 B는 집합 A를 포함한다고 하고, 기호로

$$A \subset B$$

와 같이 나타낸다.

(2) 집합 A가 집합 B의 부분집합이 아니면

$$A \not\subset B$$

와 같이 나타낸다.

2. 부분집합의 성질

(1) 집합 A에 대하여

$$\varnothing \subset A, \quad A \subset A$$

(2) 세 집합 A, B, C에 대하여$A \subset B$, $B \subset C$이면 $A \subset C$이다.

3. 서로 같은 집합

(1) 두 집합 A, B에 대하여 $A \subset B$이고 $B \subset A$일 때, 즉 두 집합의 원소가 모두 같을 때 두 집합 A, B는 서로 같다고 하고

$$A = B$$

와 같이 나타낸다.

(2) 두 집합 A, B가 서로 같지 않을 때

$$A \neq B$$

와 같이 나타낸다.

4. 진부분집합

두 집합 A, B에 대하여

$$A \subset B \quad \text{그리고} \quad A \neq B$$

일 때, 집합 A를 집합 B의 진부분집합이라고 한다.

5. 부분집합의 개수

집합 $A = \{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots,\ a_n\}$에 대하여

(1) 집합 A의 부분집합의 개수는 2^n

(2) 집합 A의 진부분집합의 개수는 $2^n - 1$

(3) 집합 A의 부분집합 중 k개의 특정한 원소를 포함하거나 포함하지 않는 부분집합의 개수는 2^{n-k}

예제 1

집합 $A = \{a,\ b,\ c,\ d,\ e\}$에 대하여 다음을 구하여라.

(1) 집합 A의 부분집합의 개수

(2) 집합 A의 진부분집합의 개수

(3) 집합 A의 부분집합 중 원소 a는 포함하고 원소 b는 포함하지 않는 부분집합의 개수

정답

(1) $2^5 = 32$

(2) $2^5 - 1 = 31$

(3) $2^{5-2} = 8$

집합의 연산

1. 집합의 연산

(1) 합집합 : $A \cup B = \{x | x \in A \text{ 또는 } x \in B\}$

(2) 교집합 : $A \cap B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \in B\}$

(3) 여집합 : $A^c = \{x | x \notin A \text{ 그리고 } x \in U\}$

(4) 차집합 : $A - B = \{x | x \in A \text{ 그리고 } x \notin B\}$

2. 집합의 교환법칙

두 집합 A, B에 대하여

(1) $A \cup B = B \cup A$

(2) $A \cap B = B \cap A$

3. 집합의 결합법칙

세 집합 A, B, C에 대하여

(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

4. 집합의 분배법칙

세 집합 A, B, C에 대하여

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

5. 드모르간 법칙

두 집합 A, B에 대하여

(1) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(2) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

6. 집합의 연산의 여러 가지 성질

전체집합 U와 세 부분집합 A, B, C에 대하여

(1) $A-B=A\cap B^c=A-(A\cap B)=(A\cup B)-B$

(2) $A\cap(A\cup B)=A$, $A\cup(A\cap B)=A$

(3) $A\cap A=A$, $A\cup A=A$

(4) $A\cap\varnothing=\varnothing$, $A\cup\varnothing=A$

(5) $A\cap U=A$, $A\cup U=U$

(6) $A\cap A^c=\varnothing$, $A\cup A^c=U$

(7) $(A^c)^c=A$

(8) $\varnothing^c=U$, $U^c=\varnothing$

유한집합의 원소의 개수

1. 합집합의 원소의 개수

(1) 두 집합 A, B에 대하여

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

(2) 세 집합 A, B, C에 대하여

$$\begin{aligned} &n(A\cup B\cup C)\\ &\quad=n(A)+n(B)+n(C)\\ &\qquad-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)\\ &\qquad+n(A\cap B\cap C)\end{aligned}$$

2. 여집합의 원소의 개수

전체집합 U의 부분집합 A에 대하여

$$n(A^c)=n(U)-n(A)$$

3. 차집합의 원소의 개수

두 집합 A, B에 대하여

$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)=n(A\cup B)-n(B)$$

명제

명제와 조건

1. 명제와 조건

(1) 참, 거짓을 판별할 수 있는 문장이나 식을 **명제**라 한다.

(2) 미지수를 포함하는 문장이나 식이 미지수의 값에 따라 참, 거짓이 결정될 때, 그 문장이나 식을 **조건**이라 한다.

(3) 전체집합 U의 원소 중에서 조건을 참이 되게 하는 모든 원소의 집합을 **진리집합**이라 한다.

※ 명제와 조건은 보통 $p, q, r, \cdots$ 로 나타내고, 조건 p, q, r의 진리집합은 각각 P, Q, R로 나타낸다.

예제 1

전체집합 U가 자연수 전체의 집합일 때, 다음 조건 p의 진리집합 P를 구하여라.

$$p \ : \ x^2 = 9$$

정답

$P = \{3\}$

2. 명제와 조건의 부정

(1) 명제 또는 조건 p에 대하여 'p가 아니다.'를 p의 부정이라 하고, 이것을 기호로 $\sim p$와 같이 나타낸다.

(2) 명제 또는 조건 p에 대하여 $\sim p$의 부정은 p이다.

$$\sim (\sim p) = p$$

(3) 명제 p가 참이면 $\sim p$는 거짓이고, 명제 p가 거짓이면 $\sim p$는 참이다.

(4) 조건 p의 진리집합을 P라 하면 조건 $\sim p$의 진리집합은 P^c이다.

(5) 조건 'p 또는 q'의 부정은 '$\sim p$ 그리고 $\sim q$'이다.

(6) 조건 'p 그리고 q'의 부정은 '$\sim p$ 또는 $\sim q$'이다.

예제 2

전체집합 $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 조건

$$p \ : \ x^2 - 3x - 4 = 0$$

의 부정의 진리집합을 구하여라.

정답

조건 p의 진리집합은 $\{4\}$이므로, 조건 p의 부정의 진리집합은 $\{1, 2, 3, 5\}$이다.

명제 'p 이면 q 이다'

1. 조건으로 이루어진 명제

두 조건 p, q에 대하여 'p 이면 q이다.'의 꼴로 되어 있는 명제를 기호로

$$p \longrightarrow q$$

와 같이 나타낸다. 이때 조건 p를 가정, 조건 q를 결론이라고 한다.

2. 명제 $p \longrightarrow q$의 참, 거짓

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때

(1) 명제 $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고,
$P \subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 참이다.

(2) 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P \not\subset Q$이고,
$P \not\subset Q$이면 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이다.

예제 1

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) $x = 1$이면 $x^2 = 1$이다.

(2) $x^2 - 3x + 2 = 0$이면 $x = 1$이다.

정답

(1) 가정의 진리집합은 $\{1\}$, 결론의 진리집합은 $\{-1, 1\}$이므로 참이다.

(2) 가정의 진리집합은 $\{1, 2\}$, 결론의 진리집합은 $\{1\}$이므로 거짓이다.

3. 반례

가정 p는 만족하지만 결론 q를 만족하지 않는 예가 하나라도 있으면 명제 $p \longrightarrow q$가 거짓이다. 이와 같은 예를 반례라고 한다.

예제 2

다음 명제가 거짓임을 보이는 반례를 구하여라.

$$x^2 = 1 \text{이면 } x = 1 \text{이다.}$$

정답

-1은 가정을 만족하지만 결론을 만족하지 않는다. 따라서 반례는 -1이다.

'모든' 또는 '어떤'을 포함한 명제

1. '모든' 또는 '어떤'을 포함한 명제

일반적으로 조건 p는 명제가 아니지만, 조건 p 앞에 '모든'이나 '어떤'이 있으면 참, 거짓이 판별되므로 명제가 된다.

2. '모든' 또는 '어떤'을 포함한 명제의 참, 거짓

전체집합 U에서의 조건 p의 진리집합을 P라고 할 때

(1) $P = U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

(2) $P \neq U$이면 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

(3) $P \neq \varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 참이다.

(4) $P = \varnothing$이면 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'는 거짓이다.

※ '모든'을 포함한 명제는 반례가 하나만 있어도 거짓인 명제가 된다.

※ '어떤'을 포함한 명제는 성립하는 예가 하나만 있어도 참인 명제가 된다.

예제 1

전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때, 다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

(1) 모든 x에 대하여 $x^2 > 0$이다.

(2) 어떤 x에 대하여 $x^2 \leq 0$이다.

정답

(1) $x = 0$이면 $x^2 = 0$이므로 거짓이다.

(2) $x = 0$이면 $x^2 = 0$이므로 참이다.

3. '모든' 또는 '어떤'을 포함한 명제의 부정

(1) 명제 '모든 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '어떤 x에 대하여 p이다.'이다.

(2) 명제 '어떤 x에 대하여 p이다.'의 부정은 '모든 x에 대하여 p이다.'이다.

명제의 역과 대우

1. 명제의 역과 대우

명제 $p \longrightarrow q$에 대하여

(1) 명제 $q \longrightarrow p$를 명제 $p \longrightarrow q$의 역이라 한다.

(2) $\sim q \longrightarrow \sim p$를 명제 $p \longrightarrow q$의 대우라 한다.

예제 1

다음 명제의 역과 대우를 말하여라.

$$x = 1\text{이면 } x^2 = 1\text{이다.}$$

정답

(1) 역 : $x^2 = 1$이면 $x = 1$이다.

(2) 대우 : $x^2 \neq 1$이면 $x \neq 1$이다.

2. 명제와 그 대우의 참, 거짓

명제 $p \longrightarrow q$와 그 대우 $\sim q \longrightarrow \sim p$의 참, 거짓은 일치한다.

조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 할 때

(1) $p \longrightarrow q$가 참이면 $P \subset Q$이고 $Q^c \subset P^c$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 참이다.

(2) $p \longrightarrow q$가 거짓이면 $P^c \not\subset Q^c$이고 $Q \not\subset P$이므로 $\sim q \longrightarrow \sim p$는 거짓이다.

예제 2

다음 명제의 참, 거짓을 판별하여라.

$$xy = 0\text{이면 } x = 0 \text{ 또는 } y = 0\text{이다.}$$

정답

주어진 명제의 참, 거짓 판별이 어려우면 대우의 참, 거짓을 판별한다. 주어진 명제의 대우는

$$x \neq 0,\ y \neq 0\text{이면 } xy \neq 0\text{이다}$$

이고, 대우가 참이므로 명제도 참이다.

충분조건과 필요조건

1. 충분조건, 필요조건

명제 $p \longrightarrow q$가 참일 때, 이것을 기호로

$$p \Longrightarrow q$$

와 같이 나타내고, p는 q이기 위한 충분조건, q는 p이기 위한 필요조건이라고 한다.

2. 필요충분조건

$p \Longrightarrow q$ 이고 $q \Longrightarrow p$ 일 때, 기호로

$$p \Longleftrightarrow q$$

와 같이 나타내고, p 는 q 이기 위한 필요충분조건, q 는 p 이기 위한 필요충분조건이라고 한다.

예제 1

두 조건 p, q 가 다음과 같을 때, p 는 q 이기 위한 어떤 조건인지 말하여라. (단, x, y 는 실수)

(1) $p : x > 2, \quad q : x > 4$

(2) $p : x^2 + y^2 = 0, \quad q : x = 0,\ y = 0$

정답

(1) $q \Longrightarrow p$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요조건

(2) $p \Longleftrightarrow q$ 이므로 p 는 q 이기 위한 필요충분조건

명제의 증명

1. 정의, 증명, 정리

(1) **정의**
용어의 뜻을 명확하게 정한 문장을 그 용어의 정의라고 한다.

(2) **증명**
명제의 가정과 이미 알려진 성질로 그 명제가 참임을 설명하는 것을 증명이라고 한다.

(3) **정리**
참임이 증명된 명제 중에서 기본이 되는 것이나 여러 가지 성질을 증명할 때 자주 이용되는 것을 정리라고 한다.

※ 정의의 예
정삼각형은 세 변의 길이가 모두 같은 삼각형이다.
직사각형은 네 내각의 크기가 같은 사각형이다.

※ 정리의 예
이등변삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다.
직사각형의 두 대각선의 길이는 서로 같고 서로 다른 것을 이등분한다.

2. 대우를 이용한 증명법

명제가 참이면 그 대우도 참이므로, 명제가 참임을 증명할 때 그 대우가 참임을 증명하는 방법이다.

예제 1

다음 명제가 참임을 대우를 이용하여 증명하여라.

자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

정답

주어진 명제의 대우는

자연수 n 에 대하여 n 이 홀수이면 n^2 도 홀수이다.

자연수 n 이 홀수이면 $n = 2k - 1$ (k 는 자연수) 로 나타낼 수 있다.

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$$

이므로 n^2 은 홀수이다.
대우가 참이므로 주어진 명제도 참이다.

3. 귀류법

명제의 결론을 부정하면 모순이 일어남을 보여 명제가 참임을 증명하는 방법을 귀류법이라 한다.

예제 2

다음 명제가 참임을 귀류법으로 증명하여라.

자연수 n 에 대하여 n^2 이 짝수이면 n 도 짝수이다.

정답

n 이 홀수이면 $n = 2k - 1$ (k 는 자연수) 로 나타낼 수 있다.

$$n^2 = (2k-1)^2 = 4k^2 - 4k + 1 = 2(2k^2 - 2k + 1) - 1$$

이므로 n^2 은 홀수이다.
n^2 이 짝수라는 가정에 모순이므로 주어진 명제는 참이다.

절대부등식

1. 절대부등식

부등식의 문자에 어떤 실수를 대입하여도 항상 성립하는 부등식을 **절대부등식**이라고 한다.

2. 절대부등식의 증명에 이용되는 실수의 성질

a, b가 실수일 때

(1) $a > b \iff a - b > 0$

(2) $a^2 \geq 0$

(3) $a^2 + b^2 \geq 0$

(4) $a^2 + b^2 = 0 \iff a = b = 0$

(5) $|a|^2 = a^2$, $|a||b| = |ab|$, $|a| \geq a$

(6) $a > 0$, $b > 0$일 때, $a > b \iff a^2 > b^2$

3. 여러 가지 절대부등식

a, b, c가 실수일 때

(1) $a^2 + ab + b^2 \geq 0$
(단, 등호는 $a = b = 0$일 때 성립)

(2) $a^2 - ab + b^2 \geq 0$
(단, 등호는 $a = b = 0$일 때 성립)

(3) $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$
(단, 등호는 $a = b = c$일 때 성립)

(4) $|a| + |b| \geq |a + b|$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)

(5) $|a - b| \geq |a| - |b|$
(단, 등호는 $ab \geq 0$일 때 성립)

4. 산술평균과 기하평균의 관계

양수 a, b에 대하여

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

단, 등호는 $a = b$일 때 성립한다.

※ 양수 a, b에 대하여 $\frac{a+b}{2}$를 산술평균, $\sqrt{ab}$를 기하평균이라고 한다.

※ $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} = \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$

예제 1

양수 a, b에 대하여 $a + b = 4$이다. ab의 최댓값을 구하여라.

정답

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{4}{2} \geq \sqrt{ab} \quad \therefore \quad ab \leq 4$$

이다. 따라서 ab의 최댓값은 4이다.

예제 2

양수 a, b에 대하여 $ab = 16$이다. $a + b$의 최솟값을 구하여라.

정답

산술평균과 기하평균의 관계에 의하여

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{16} \quad \therefore \quad a + b \geq 8$$

이다. 따라서 $a + b$의 최솟값은 8이다.

5. 코시-슈바르츠 부등식

실수 a, b, x, y에 대하여

$$(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) \geq (ax + by)^2$$

단, 등호는 $ay = bx$일 때 성립한다.

$$\begin{aligned}
&(a^2 + b^2)(x^2 + y^2) - (ax + by)^2 \\
&= a^2x^2 + a^2y^2 + b^2x^2 + b^2y^2 - (a^2x^2 + 2abxy + b^2y^2) \\
&= a^2y^2 - 2abxy + b^2x^2 = (ay - bx)^2 \geq 0
\end{aligned}$$

예제 3

$x^2 + y^2 = 9$일 때, $3x + 4y$의 최솟값과 최댓값을 구하여라. (단, x, y는 실수)

정답

코시-슈바르츠 부등식에 의하여

$$(3^2 + 4^2)(x^2 + y^2) \geq (3x + 4y)^2, \quad (3x + 4y)^2 \leq 225$$

$$\therefore \quad -15 \leq 3x + 4y \leq 15$$

이다. 따라서 최솟값은 -15, 최댓값은 15이다.