

경우의 수

합의 법칙과 곱의 법칙

1. 합의 법칙

두 사건 A, B 가 동시에 일어나지 않을 때, 사건 A, B 가 일어나는 경우의 수를 각각 m, n 이라 하면, 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는

$$m + n$$

※ 동시에 일어나는 경우의 수가 l 이라면, 사건 A 또는 사건 B 가 일어나는 경우의 수는

$$m + n - l$$

예제 1

5종류의 빵과 4종류의 과자가 있다. 빵 또는 과자에서 한 개를 선택하는 방법의 수를 구하여라.

정답

$$5 + 4 = 9$$

예제 2

주사위 한 개를 던질 때, 홀수 또는 소수의 눈이 나오는 경우의 수를 구하여라.

정답

홀수는 1, 3, 5의 3가지, 소수는 2, 3, 5의 3가지, 홀수이면서 소수는 3, 5의 2가지이므로

$$3 + 3 - 2 = 4$$

2. 곱의 법칙

사건 A 가 일어나는 경우가 m 가지이고, 그 각각에 대하여 사건 B 가 일어나는 경우가 n 가지일 때, 두 사건 A, B 가 동시에 일어나는 경우의 수는

$$m \times n$$

예제 3

3종류의 농구공과 6종류의 축구공이 있다. 농구공에서 한 개, 축구공에서 한 개를 선택하는 방법의 수를 구하여라.

정답

$$3 \times 6 = 18$$

순열과 조합

순열과 순열의 수

1. 순열

서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 선택하여 일렬로 나열하는 것을 n 개에서 r 개를 택한 순열이라 하고, 이 순열의 수를 기호로

$${}_n P_r$$

과 같이 나타낸다.

2. 순열의 수 1

서로 다른 n 개에서 서로 다른 r 개를 택하는 순열의 수는

$${}_n P_r = n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)$$

단, $0 < r \leq n$

3. n 의 계승

1부터 n 까지의 자연수를 차례로 곱한 것을 n 의 계승이라 하고, 기호로 $n!$ 과 같이 나타낸다.

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1$$

이때 $0! = 1$ 로 정의한다.

※ $n!$ 은 n 팩토리얼 (factorial)이라 읽는다.

4. 순열의 수 2

${}_n P_0 = 1$ 로 정의하면

$${}_n P_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

단, $0 \leq r \leq n$

예제 1

5개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5에서 3개의 숫자를 선택하여 세 자리 자연수를 만드는 방법의 수를 구하여라.

정답

$${}_5 P_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$${}_5 P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 60$$

조합과 조합의 수

1. 조합

서로 다른 n 개에서 순서를 생각하지 않고 r 개를 선택하는 것을 n 개에서 r 개를 택한 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로

$${}_n C_r$$

과 같이 나타낸다.

2. 조합의 수의 계산

${}_n C_0 = 1$ 이라 정의하면

$$\begin{aligned} {}_n C_r &= \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-r+1)}{r!} \\ &= \frac{n!}{r!(n-r)!} \end{aligned}$$

단, $0 \leq r \leq n$

※ n 개를 선택하면 $(n-r)$ 개가 남으므로 ${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$

예제 1

100명의 학생 중에서 98명을 선택하는 경우의 수를 구하여라.

정답

$${}_{100} C_{98} = {}_{100} C_2 = \frac{100 \cdot 99}{2 \cdot 1} = 4950$$